1) (2 val) Um sistema vibratório com um grau de liberdade e amortecido é sujeito a diferentes [illegible] e pretende-se [illegible] eventuais pontos notáveis, a [illegible] as seguintes situações:

a) (33%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F\delta(t-\tau)$;

b) (33%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F_0\mu(t-\tau)$.

O sistema é sujeito a uma solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$ cuja frequência fundamental [illegible] T é superior à que é frequência de ressonância do sistema. No entanto, o sistema responde com [illegible] de elevada [illegible].

c) (33%) Diagnosticar a causa de tal comportamento.

2) (2 val) Considere um sistema vibratório com um grau de liberdade em regime forçado.

a) (25%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos notáveis.

b) (25%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação arbitrária;

c) (25%) Definir espectro de resposta transiente e indicar a sua principal utilidade.

d) (25%) Um sistema não amortecido em regime forçado harmónico, quando excitado a uma frequência idêntica à sua frequência natural, responde com uma amplitude que aumenta indefinidamente (sem limite). Com base na análise de forças actuantes sobre o sistema, explicar este comportamento.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$.

a) (25%) Definir modos naturais de vibração;

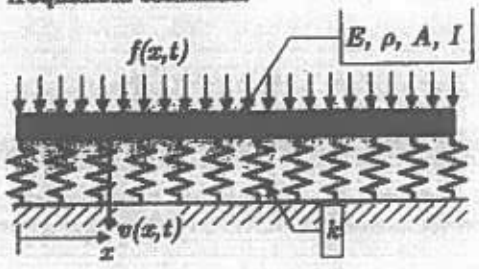
b) (25%) Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

c) (25%) Referir qual o interesse da representação do sistema de equações de movimento na base modal.

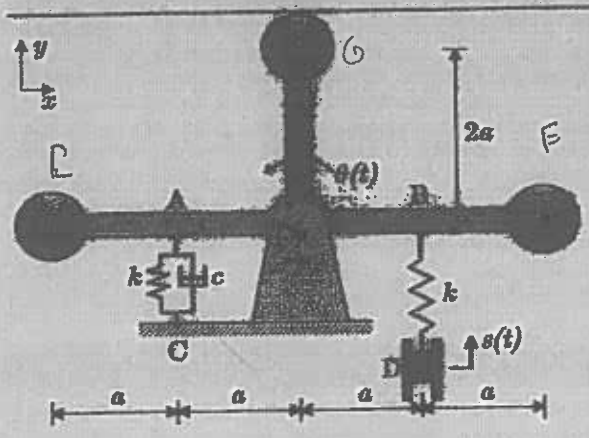
d) (25%) Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva? A matriz de rigidez é sempre definida positiva? Justificar.

4) (2 val) O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma equação diferencial de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de variáveis.

a) (40%) O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípio(s) se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.



b) (60%) A figura representa uma viga suportada por uma suspensão elástica de rigidez distribuída. Isolar um elemento infinitesimal e estabelecer a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli.



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida em forma de T articulada no ponto O e com uma massa concentrada m em cada uma das extremidades. A massa da barra é desprezável em face das massas concentradas. No ponto A, está ligada à barra uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante de amortecimento c. No ponto B, está ligada à barra uma mola de rigidez k. A outra extremidade desta última mola está submetida a um deslocamento $s(t)$ na vertical. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, as molas não estão deformadas. Se, com $s(t) = 0$, for aplicada ao sistema uma perturbação inicial tal que $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, o sistema responde conforme se representa na figura abaixo.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, admitir que a equação de movimento é,
$0.015\ddot{\theta}(t) + 0.0025c\dot{\theta}(t) + (0.005k - 0.4905)\theta(t) = 0.05ks(t)$.

Determinar,

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

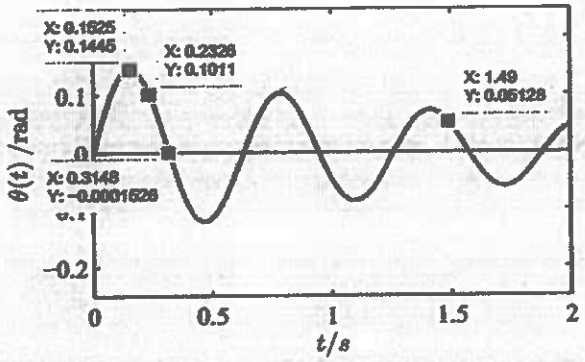
c) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k das molas;

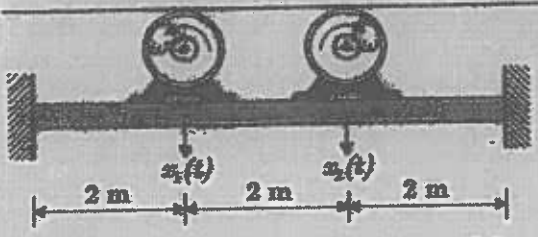
e) (10%) a constante de amortecimento c;

f) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor quando, após aplicação da perturbação inicial descrita acima, o sistema regressa ao estado de repouso.

g) (20%) Para $a = 0.05$ m e $s(t) = 5 \times 10^{-3} \cos(\omega t)$ m, considerando apenas o regime estacionário, determinar a(s) frequência(s) de excitação de modo que a amplitude do deslocamento de cada uma das massas seja igual a 0.01 m e que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ seja superior a $\pi/2$.



Resposta livre ou natural



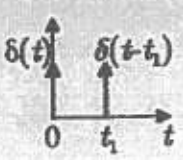
2) (4 val.) Uma máquina de 500 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

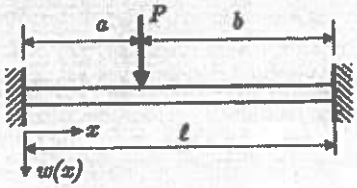
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 385 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

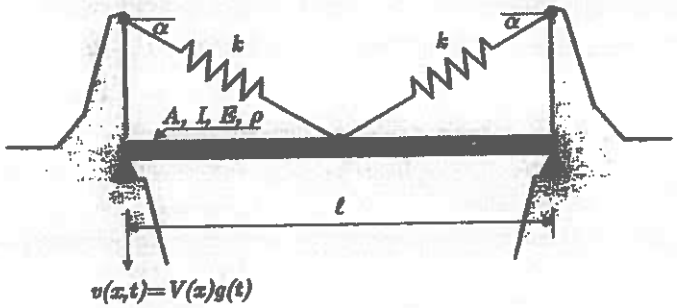
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t=0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$

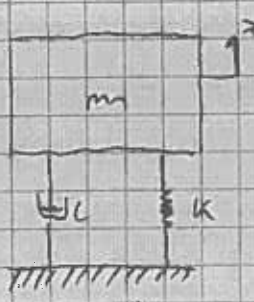




3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = eEI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Exame 11-07-2008



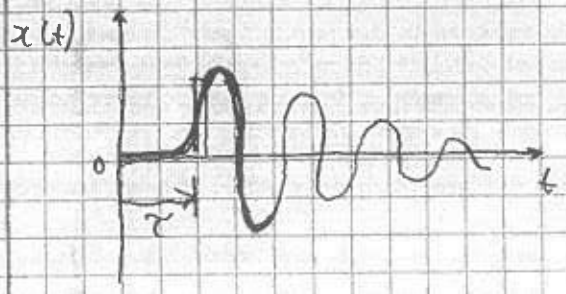
a) $\epsilon = \overline{\Pi}$, $f(t) = F\,\delta(t-\overline{\Pi})$

Solicitação impulsiva no instante $t=\tau$, $f(t) = F\,\delta(t-\tau)$

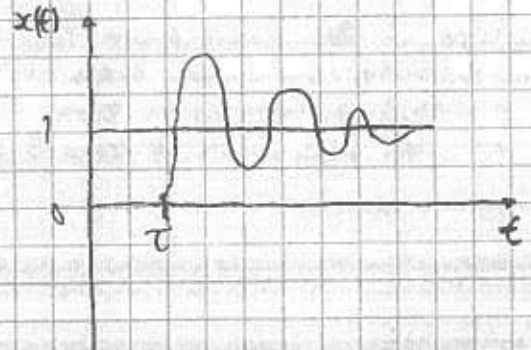
$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

com $h(t-\tau) = \dfrac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\,\mathrm{sen}(\omega_d(t-\tau))$

É uma resposta harmónica (c/ decaimento $\xi>0$) cuja amplitude máxima é igual a $\dfrac{F^*}{m\omega_d}$



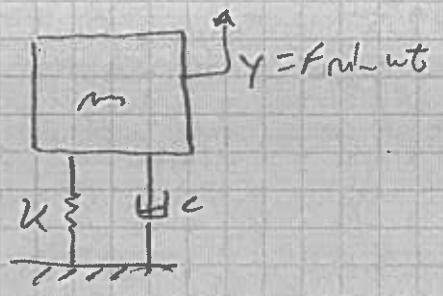
b) $$x_1(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$



c) $f(t) = f(t+\overline{\Pi})$ $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{\Pi} < \omega_n$

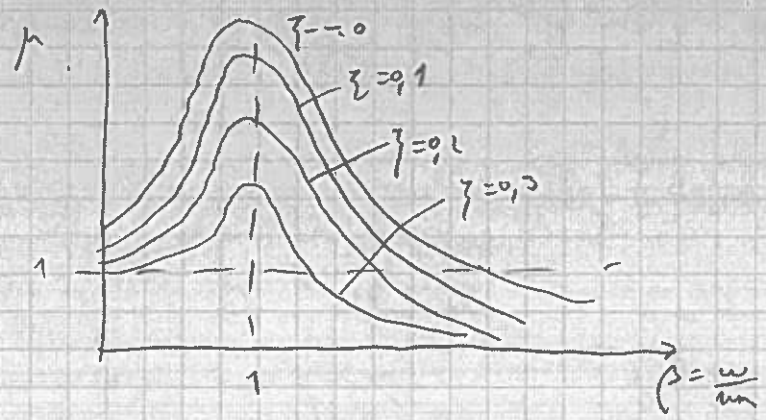
A solicitação periódica pode ser decomposta numa série de Fourier em que cada harmónico tem uma frequência $p\omega$ (com p sendo a ordem do harmónico). A resposta é portanto obtida por uma sobreposição dos efeitos de cada harmónico de solicitação e o valor do período global conduz a uma frequência abaixo da frequência natural o que mais significa que não haja um harmónico em que a sua frequência de resposta seja próxima da frequência natural do sistema. Quando isto acontece sabe-se que o seu factor de amplificação dinâmica pode aumentar consideravelmente tornando esse harmónico como predominante e causando assim grande vibração

2)



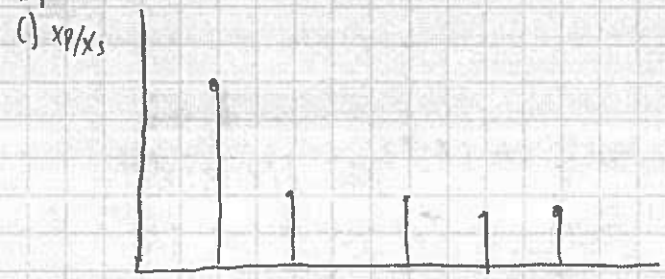
a) $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$

Factor de ampliação dinâmica é a razão entre a amplitude dinâmica $x(\omega)$ e o deslocamento estático X_s provocado por uma força estática de grandeza F idêntica à amplitude de força harmónica



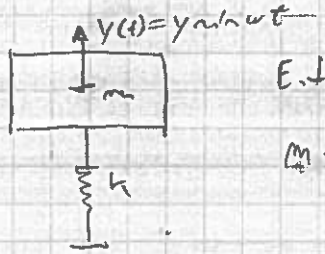
b)

c)



O espectro de resposta permite ver quais os harmónicos de ordem p que tem maior influência no nosso sistema, permite também ver como varia a resposta em cada harmónico de ordem p para frequências de solicitação diferentes, ver quais os harmónicos que eventualmente se aproximam mais da frequência de ressonância.

d)

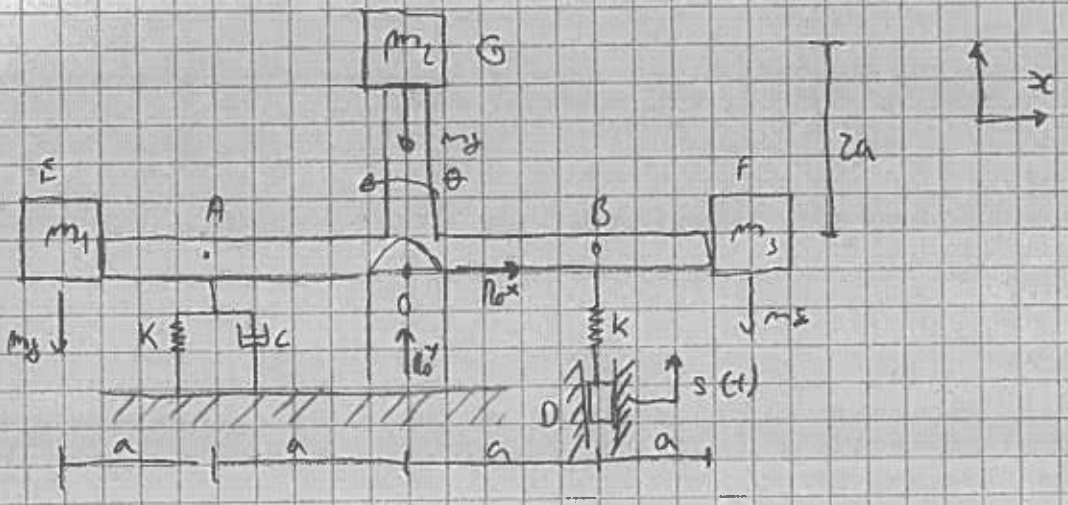


Estática $\rightarrow \vec{F} = \vec{Q}$

$m\ddot{\theta} + K\theta = y \sin \omega t$

Como o amortecimento é o factor dissipador de energia, na sua ausência a energia cinética vai ser transformada em potencial e vice versa o que conjugado com uma solicitação harmónica a magnitude da resposta crescerá indefinidamente

Pratica 11-07-2008

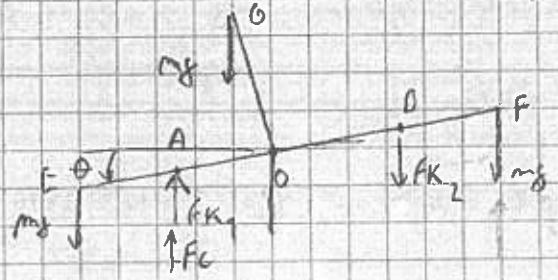


$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow R_{0Y} - 3mg = 0 \Rightarrow \underline{R_{0Y} = 3mg}$

$\vec{M} = \vec{K}$

$\vec{K_0} = \vec{H_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_0\ddot{\theta} \end{vmatrix}$ $\quad J_0 = J_1 + J_2 + J_3 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 = 3m\left((2a)^2 + (1a)^2 + (2a)^2\right)$

$= 3m\left(3(2a^2)\right) = 3m\left(3 \times 4a^2\right) = 36ma^2$



$\vec{OA} \times \vec{FK} + \vec{OD} \times \vec{FC} + \vec{OF} \times \vec{m_3 g} + \vec{OE} \times \vec{m_1 g} + \vec{OG} \times \vec{m_2 g} + \vec{OB} \times \vec{FK} = \vec{K_0}$

$\vec{OA} = \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OF} = \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OB} = \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OG} = \begin{vmatrix} -2a\sin\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OE} = \begin{vmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

$FK_1 = -K d_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ +Ka\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad FK_2 = -K\Delta(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ -K\Delta(t) \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{F_C} = -C\dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ +C2a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ Ka\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ +C2a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} -2a\sin\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -K\Delta(t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 36ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$ (1)

$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -Ka^2\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +2Ca^2\dot{\theta}\cos^2\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2amg\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2amg\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2amg\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a\Delta(t)\cos\theta \end{vmatrix} =$

$- \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 36ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$

$-Ka^2 \sin\theta\cos\theta + 2Ca^2\dot\theta\cos^2\theta - 2amg\cos\theta + 2amg\cos\theta + 2amg\sin\theta - aK\delta(t)\cos\theta = 36ma^2\ddot\theta$

linearizando com $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$

$-Ka^2\theta - 2Ca^2 - \cancel{2amg} + \cancel{2amg} + 2amg\theta - aK\delta(t) = 36ma^2\ddot\theta$

$36ma^2\ddot\theta + 2Ca^2\dot\theta + Ka^2\theta - 2amg\theta = -aK\delta(t)$

b) $0{,}015\ddot\theta + 0{,}025C\dot\theta + (0{,}005K - 0{,}4905)\theta = 0{,}05K\delta(t)$

$m_{eq} = 0{,}015$
$K_{eq} = (0{,}005K - 0{,}4905)$
$C_{eq} = 0{,}025C$
$f_{eq} = 0{,}05K\delta(t)$

$\Pi = \frac{1{,}49 - 0{,}2326}{2} = 0{,}6287$

$\delta = \frac{1}{N}\ln\frac{0{,}1011}{0{,}05128} = \frac{1}{2}\ln\frac{0{,}1011}{0{,}05128} = 0{,}3394$

$\delta = \frac{2\Pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow 0{,}3394 = \frac{2\Pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = 0{,}0539$

c) $\omega_n = \frac{\delta}{\xi\Pi} = \frac{0{,}3394}{0{,}0539 \times 0{,}6287} = 10{,}02\ rad/s$

d) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{K_{eq}}{m_{eq}} \Rightarrow K_{eq} = \omega_n^2 \times m_{eq} = 10{,}02^2 \times 0{,}015 = 1{,}506\ N/m^2$

e) $\xi = \frac{C_{eq}}{2m_{eq}\omega_n} \rightarrow \xi = \frac{0{,}025C}{2 \times 0{,}015 \times \omega_n}$ $\quad C = \frac{0{,}0539 \times 2 \times 0{,}015 \times 10{,}02}{0{,}025} = 0{,}6481\ Ns/m$

f) $\Delta E = E_0 - E_\epsilon$

$E_0 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}K_{eq}\theta^2$

$\theta(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d}t - \phi)$

$A = \sqrt{\left(\frac{\dot\theta_0 + \xi\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 + \theta_0^2} = \frac{\dot\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{(0{,}02\sqrt{1-0{,}0539^2}}\dot\theta_0 = 0{,}1\dot\theta_0$

$\theta(t) = 0{,}1\dot\theta_0 e^{-0{,}0539 \times 10{,}02 t}\cos\left(10{,}02\sqrt{1-0{,}0539^2}\,t - \frac{\Pi}{2}\right)$

$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot\theta_0 + \xi\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,\theta_0} = \tan^{-1}\frac{\dot\theta_0}{0} = \frac{\Pi}{2} = 1{,}5708$

$x(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega_d t - \beta) = 0 \quad \theta(t) = 0{,}1\dot\theta_0$

$\dot\theta_0(0) = A^{-\xi\omega_n t}\left(\omega_n\cos(\omega_d t - \phi - \psi)\right)$

$\psi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0{,}0539^2}}{0{,}0539} = 1{,}519$

$0 = 0{,}1\ \dot{\theta}_0 \cos(1{,}5708)$

$\dot{\theta}_0 = 0{,}1\ \dot{\theta}_0\ e^{0}\ (\omega_n \cos(-\phi - \psi) \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = 0{,}1\ \dot{\theta}_0\ 10{,}02 \cos(-1{,}5708 - 1{,}517)$

$\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_0 = 0 \qquad 2\dot{\theta}_0 = 0 \qquad \dot{\theta}_0 = 0$

8) $a = 0{,}05\,m \qquad \Delta(t) = 5 \times 10^{-3} \cos(\omega t)\,m$

$\theta_0 = 0{,}01\,m = 0{,}01$

$a \sin\theta = 5 \times 10^{-3}\,m \Rightarrow \theta(\omega) = \sin^{-1}\left(\frac{5 \times 10^{-3}\,m}{0{,}05}\right) = 0{,}2014$

$\frac{\theta(\omega)}{\theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \Leftrightarrow$

$\frac{0{,}2014}{0{,}01} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0{,}0539 \times \beta)^2}}$

1)

a) $T = \frac{0,5464 - 0,1447}{2} \simeq 0,20085\ s \Rightarrow w_d = \frac{2\pi}{T} \simeq 31,2830\ rad/s$

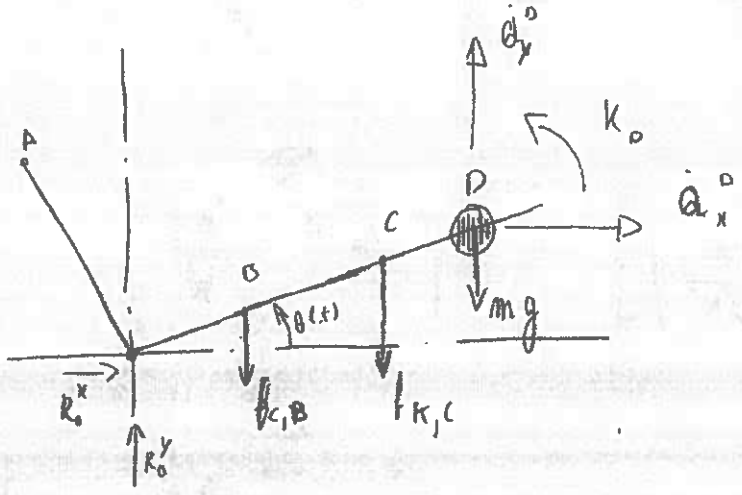
$w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi w_n T N \Leftrightarrow \ln \frac{-0,3329}{-0,09416} = \xi \left(\frac{31,2830}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \times$

$\times 0,20085 \times 2 \Leftrightarrow \xi \simeq 0,09999 \simeq 0,1000$

b) $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \simeq 31,4405\ rad/s$

c) Diagrama de Corpo Livre:



$\Sigma M_0 = \Sigma K_0$

Barra sem L, com inércia desprezável logo:

$\vec{Q}^L = \vec{0}$; $\vec{K}_G^L = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_0^L = \vec{0}$

Massa Concentrada:

$$\vec{OD} = \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 3a \\ 3a\,\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^{D} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 3a\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_D = \underbrace{[I]}_{=0} \times \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_D = \vec{0}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \underbrace{\vec{K}_D^{m}}_{=0} + \vec{OD} \times \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} 3a\,\theta \\ 3a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 3am\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +9a^2 m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

— " —

Força da mola C:

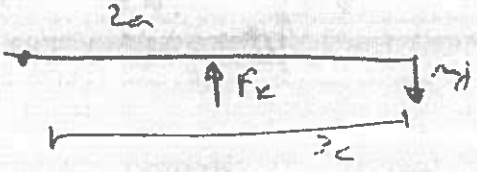
$$\theta(t) = 0 \Rightarrow -2a\cos 0 \cdot \left[K\left(2a\sin C - \theta_{md}\right)\right] - 3a\cos 0 \cdot (mg) \Rightarrow \theta_{md} = \frac{3mg}{2K}$$

Logo:

$$|f_{K,C}| = k\left[\left(2a\sin\theta - \frac{3mg}{2K}\right)\right] = k\left(2a\,\theta - \frac{mg}{K}\right)$$

Força de amort.:

$$|f_{C,B}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(a\sin\theta\right)\right] \simeq Ca\,\theta$$



$2a\,F_K = 3a \rightarrow$

Então, a eq. diferencial de movimento fica:

$\Sigma M_0 = \Sigma k_0 \Rightarrow \quad -a\cos\theta\cdot(Ca\dot\theta) - 2a\cos\theta\cdot\left[K\left(2a\theta - \frac{3mg}{7K}\theta\right)\right] -$

$-3a\cos\theta\,(mg) = +9a^2 m\ddot\theta \iff$

$\Rightarrow \boxed{(9a^2m)\ddot\theta(t) + (a^2C)\dot\theta(t) + (4a^2K)\theta(t) = 0}$

Com $m = 1kg$

1) $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{a^2C}{2m_{eq}\cdot w_n} \Rightarrow 0{,}1000 = \frac{a^2C}{2\times 9a^2\times 1\times 31{,}4405} \iff$

$\iff \boxed{C \cong 56{,}5929\ N\,s/m^2}$

$w_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \iff 31{,}4405 = \sqrt{\frac{4a^2K}{9a^2\times 1}} \iff \boxed{K \cong 2224{,}19\ N/m}$

2) $S(t) = S^{=0{,}005}\cdot\cos\left(\overset{6\pi}{w}t - \frac{\pi}{2}\right)$

Então:

$(9a^2m)\ddot\theta(t) + (a^2C)\dot\theta(t) + (4a^2K)\theta(t) = 2aKS\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) - aCwS\,\mathrm{sen}\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \underbrace{S\sqrt{(2aK)^2 + (aCw)^2}}_{\Theta(w)}\cdot\cos\left(wt - \frac{\pi}{2} + \right)$

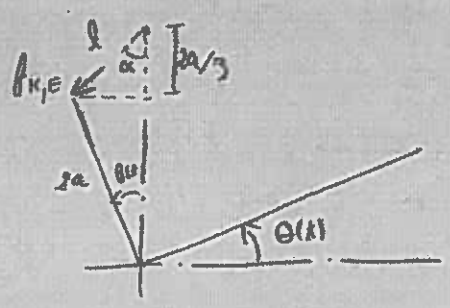
com $\phi = \arctan\frac{aCw}{2aK}$

Amplitude da Resposta:

$\Theta(w) = \frac{\frac{S\sqrt{(2aK)^2 + (aCw)^2}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ Substituindo valores $\Theta(w) \cong \frac{0{,}003945}{|a|}$

$$S_l = 4a \cdot \underbrace{\operatorname{sen}[\theta(\omega)]}_{\approx\, \theta(\omega)} \cong 4a \cdot \theta(\omega) = 4a \cdot \frac{0{,}003\ldots}{|a|} = 0{,}01578 \text{ m} \approx 15{,}8 \text{ mm}$$

f)



Da cinemática sabemos que:

$$\begin{cases} l \operatorname{sen}\alpha = 2a \operatorname{sen}\theta \\ l\cos\alpha + 2a\cos\theta = 2a + \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \operatorname{sen}\alpha = 2a \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2a \cdot \operatorname{sen}\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \dfrac{2a \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \alpha = \arctan\left[\dfrac{2a \operatorname{sen}\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta}\right] \end{cases}$$

Se linearizarmos:

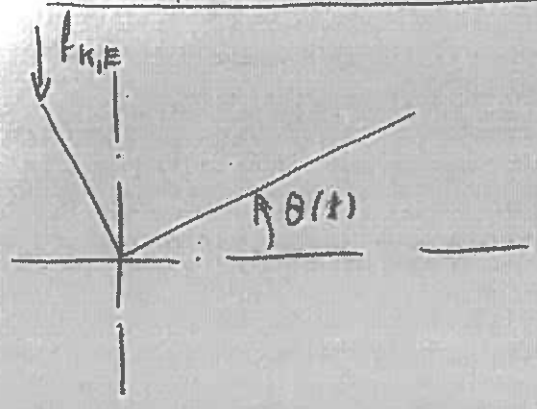
$$\alpha = \arctan\left[\frac{\cancel{2a}\,\theta}{\frac{\cancel{2a}}{3}}\right] = \arctan(3\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$l \cong \frac{2a \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\arctan 3\theta)} \approx \frac{2a\theta}{\operatorname{sen}(\arctan 3\theta)}$$

Logo: $$|f_{K,E}| = K_1 \cdot (a - l) = K_1 \cdot \left(a - \frac{2a\theta}{\operatorname{sen}(\arctan 3\theta)}\right)$$

Para simplificar os cálculos



$$f_{K,E} = K_1\left[\left(2a - 2a\overset{\sim 1}{\cos\theta} + \frac{a}{3}\right)\right] = K_1 \cdot \frac{a}{3}$$

Logo: $M_\theta^{K,E} = 2a \operatorname{sen}\theta \cdot \left(K_1 \cdot \frac{a}{3}\right) = \frac{2a^2}{3} \cdot K_1 \cdot \theta$

Portanto, a eq. diferencial de movimento fica:

$$(9a^2 m)\ddot{\theta}(t) + (a^2 C)\dot{\theta}(t) + \left(\frac{4}{3}a^2 K - \frac{2a^2}{3}\overset{4K}{K_1}\right)\theta = S\sqrt{(2aK)^2 + (aC\omega)^2}\cos(\omega t$$

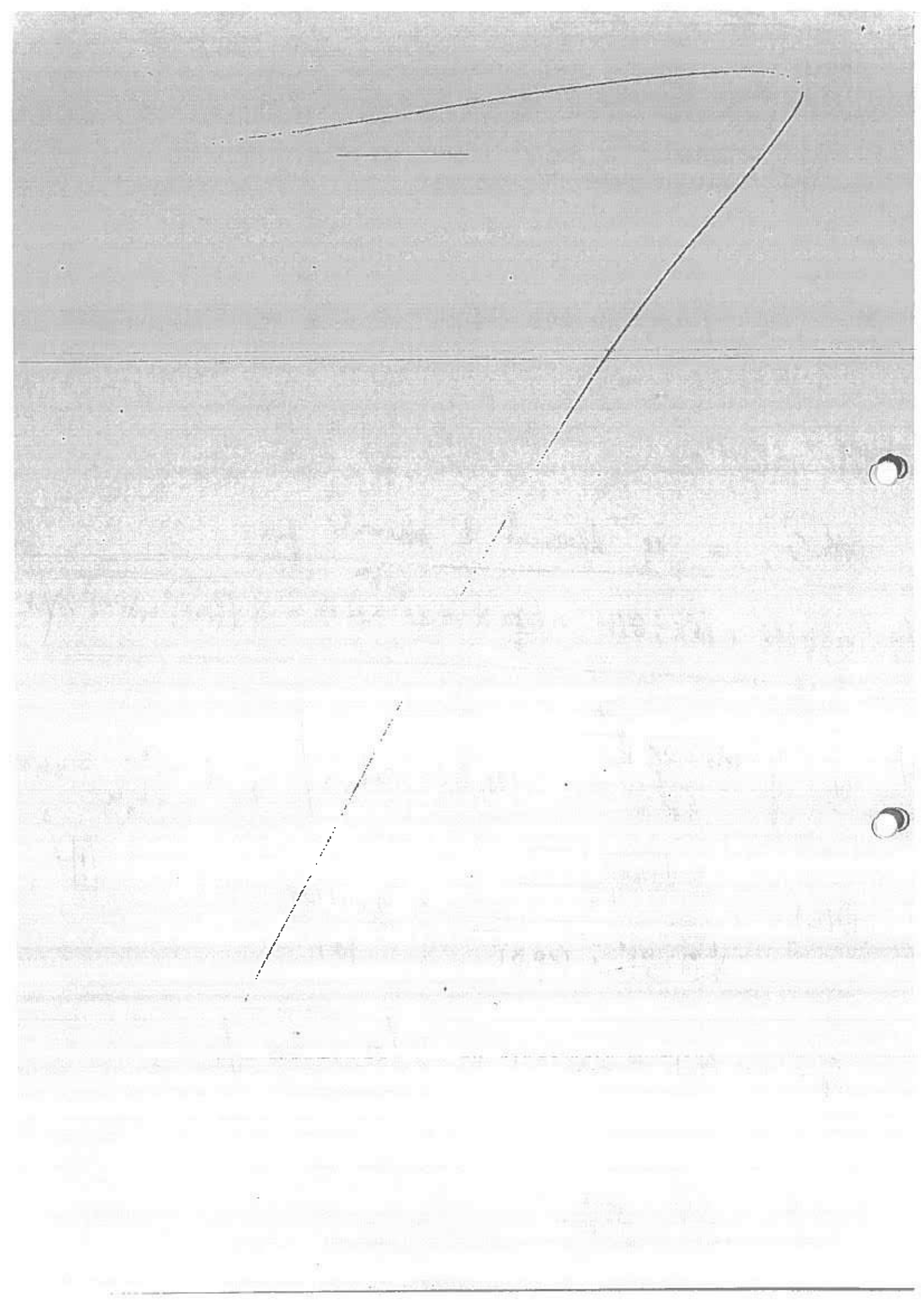
1) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{4a^2 K - \frac{2a^2}{3}\overset{4K}{K_1}}{9a^2 m}} \approx \boxed{18,1522 \text{ rad/s}}$; $\xi = \dfrac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \cong 0,16$

$\boxed{!}$

$$\theta(\omega) = \frac{\dfrac{S\sqrt{(2aK)^2 + (aC\omega)^2}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \approx \frac{0,007121}{|a|}$$

$$S_l = 4a\,\theta(\omega) \cong 0,028484 \text{ m} \approx \boxed{28,5 \text{ mm}}$$

2) ; 3) não saem!



Barras:

$$\vec{H}_O^{b_1} = \cancel{[I]}^{\,=0} \times \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_O^{b_1} = \vec{0}$$

$$\vec{H}_G^{b_2} = \cancel{[I]}^{\,=0} \times \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{Q}^{b_2} = \cancel{m}^{\,=0} \times \vec{OG} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_G^{b_2} = \vec{0}$$

Massa:

$$\vec{H}_C^{m} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{I_{zz}}^{\,=0} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{I_{zz}}^{\,=0}\,\dot{\theta} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{Q}^{m} = m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} -a \sin\theta \\ a \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -a\, m\, \dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} -a\, m\, \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \cancel{\vec{H}_G}^{\,=0} + \vec{OG} \times \vec{Q}^{m} \simeq \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a\, m\, \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\, \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \vec{K}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\, \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Força da mola

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow \cancel{f_{K,B}}^{\,=0} \Rightarrow \theta_{mola} = 0 \text{ rad}$$

$$\left| f_{K,B}^{K} \right| = K \left[\left(a \sin\theta - x(t) \right) - \cancel{\ell_{mola}}^{\,=0} \right] = K \left(a \sin\theta(t) - x(t) \right)$$

Força amort.:

$$|F_{C,O}^{Y}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(3a \underset{\approx}{\sin}\theta\right)\right] = 3aC\dot{\theta}$$

Eq. diferencial de movimento:

$$\Sigma M_O = \Sigma K_O \Rightarrow a \underset{\approx}{\sin}\theta \cdot (mg) - a \underset{\approx}{\cos}\theta \cdot \left(K(a\theta - x(t))\right) -$$

$$- 3a \underset{\approx}{\cos}\theta \cdot \left(3aC\dot{\theta}\right) = a^2 m \ddot{\theta} \iff$$

$$\iff \boxed{\left(a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(9a^2 C\right)\dot{\theta}(t) + \left(a^2 K - a m g\right)\theta(t) = (aK)\,x(t)}$$

i) $$W_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \iff 179{,}87 = \sqrt{\frac{0{,}5^2 \times 5\times 10^4 - 0{,}5\ m \cdot 9{,}81}{0{,}5^2 \times m}} \iff$$

$$\iff m \cong 1{,}5445\ kg$$

e) Considerando apenas a resposta estacionária:

$$\theta(t) = \Theta(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

Pois $y(t) = X\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{aK}{a^2 K - amg}\,K_{eq}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (1)$$

É-nos dada a amplitude de vibração:

$a \underbrace{\sin\theta}_{\approx \theta} = 0{,}010 \Rightarrow \theta(w) \approx 0{,}02 \text{ rad}$

Como: $\beta = \frac{w}{w_n} = \frac{360}{179{,}87} \approx 2{,}0015$

$m \approx 1{,}5445 \text{ Kg}$

$K = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$

$\xi \approx 0{,}1216$

Substituindo em (1):

$X \approx 0{,}03043 \text{ m} \cong \boxed{30{,}4 \text{ mm}}$

1) $\theta(w)_{\text{máx}} = 5^\circ \cong 0{,}08727 \text{ rad}$

$$0{,}08727 = \frac{0{,}5 \times 5\times10^4 \times 0{,}03043}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\xi = 0{,}1216)$$

$$0{,}08727 = \frac{0{,}5^2 \times 5\times10^4 - 0{,}5 \times 1{,}5445}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Leftrightarrow \beta_1 \cong 0{,}5618 \ \vee \ \beta_2 \cong 1{,}2748$$

Logo: $\boxed{w_1 = \beta_1 \cdot w_n \cong 101{,}05 \text{ rad/s} \ \vee \ w_2 \cong 229{,}30 \text{ rad/s}}$

2) Não vai

3) Não vai

Parte teórica – [illegible]

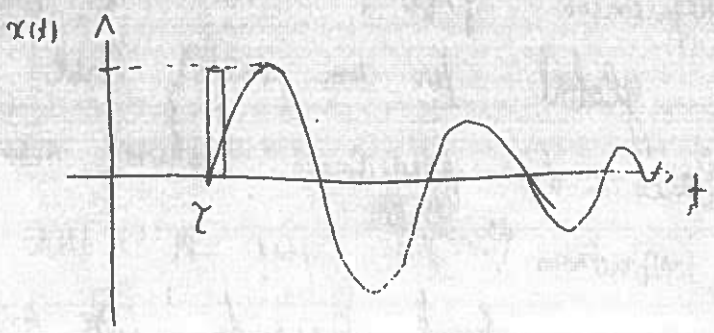
1 a) $$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\text{Com} \quad h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right)$$

A resposta a uma solicitação impulsiva é:

$$x(t) = \frac{F^*}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right)$$

É portanto uma resposta harmónica (com decaimento se $\xi > 0$) cuja amplitude máxima é igual a $\frac{F^*}{m\omega_d}$



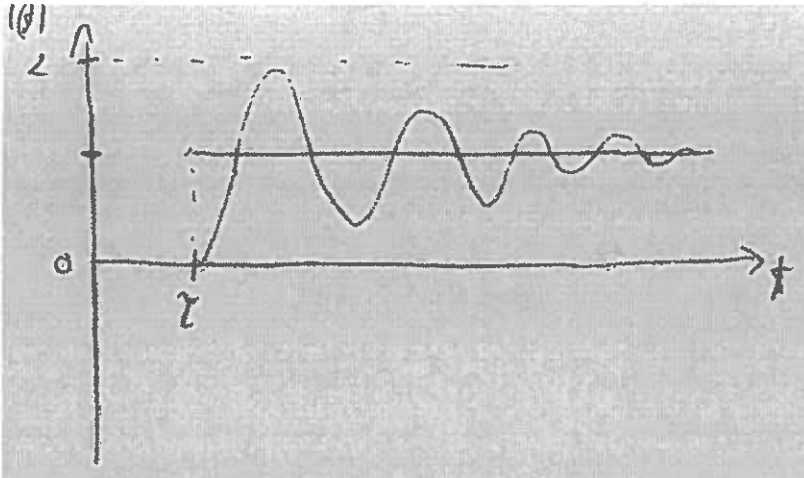
b) A resposta é do tipo:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right) d\tau$$

Simplificando: $\xi = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} \left(-\frac{1}{-\omega_d} \cos\left(\omega_d (t-\tau)\right) \right)_0^t = \frac{F_0}{m\omega_d} \left(\frac{1}{\omega_d} - \frac{1}{\omega_d} \cos\omega_n t \right)$$

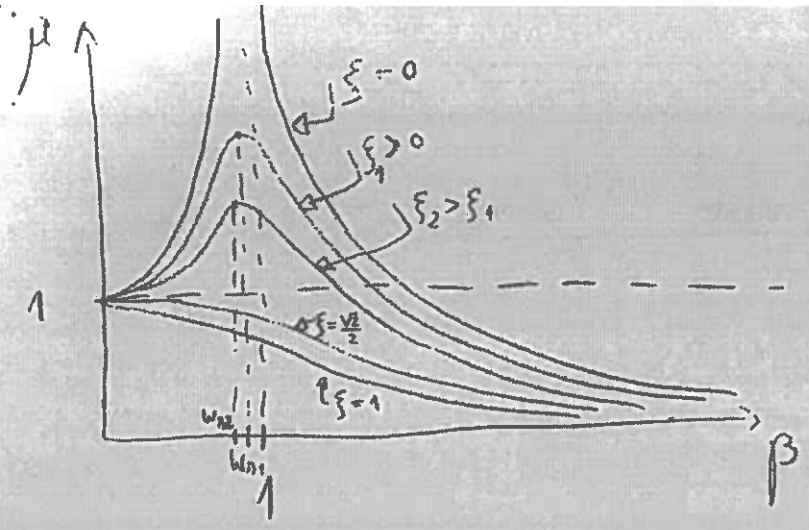
$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left(1 - \cos\omega_n t\right) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos\omega_n t\right)$$



c) A solicitação pode ser decomposta numa série de Fourier em que cada harmónico tem de frequência pw (com p sendo a ordem do harmónico). A resposta é obtida por sobreposição dos efeitos de cada harmónico de solicitação, sendo por sua vez um harmónico desfasado mas com a mesma frequência pw. Como se pode ver, o facto de o período global ter um valor que conduz a uma frequência afastada da frequência natural não quer dizer que não haja um harmónico da resposta em que a sua frequência seja próxima da frequência natural. Quando isso acontece, sabe-se que o factor de amplificação aumenta muito, podendo tornar esse harmónico no harmónico predominante (e causando grande vibração).

2) Factor de amplificação dinâmica: é o factor adimensional que multiplica o valor do deslocamento estático $\left(\frac{F}{k}\right)$ e que portanto traduz o efeito amplificador do movimento alternado do sistema no seu próprio deslocamento.

Define-se como: $$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

b) O impulso pode ser aplicado no instante genérico: $t = \tau$

Assim sendo a resposta a um impulso unitário vem:

$$h(t - \tau)$$

Seja a excitação arbitrária $f(t)$

Então, para obter a expressão da resposta total do sistema é necessário integrar do instante inicial, $\tau = 0$, até ao instante pretendido $\tau = t$:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$

c) [illegible] de resposta transitória [illegible] representação gráfica da resposta máxima adimensional de um sistema com um grau de liberdade a um [illegible] em função de uma razão adimensional da frequência ou do tempo.

1) (1 val) A vibração mecânica...
- a) (25%) Definir vibração mecânica;
- b) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
- c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
- d) (25%) Definir frequência de ressonância.

2) (2 val) Caracterizar sucintamente e esboçar graficamente (indicando eventuais pontos notáveis) a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:
- a) (25%) perturbação inicial de deslocamento $x(t=0)=x_0$;
- b) (25%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F^*\delta(t-\tau)$;
- c) (25%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F_0\mu(t-\tau)$;
- d) (25%) Solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$.

3) (1 val) Considerar um sistema vibratório amortecido com um grau de liberdade em regime forçado.
- a) (50%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos (zonas) notáveis;
- b) (50%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação transiente arbitrária.

4) (1 val) Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.
- a) (50%) Indicar quais os elementos constituintes de um transdutor de vibrações;
- b) (50%) Caracterizar, justificando, a frequência natural e o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

5) (1 val) A análise do comportamento vibratório de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.
- a) (50%) Definir função de resposta em frequência e estabelecer a expressão da função receptância. Justificar a razão pela qual a função de resposta em frequência é um modelo do sistema;
- b) (50%) Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa da equação diferencial do movimento.

6) (2 val) O isolamento de vibrações é uma técnica de controlo passivo de vibrações.
- a) (50%) Indicar em que consiste o isolamento de vibrações. Representar a transmissibilidade de força em função da frequência, indicando eventuais pontos (zonas) notáveis, e discutir a eficiência do isolamento em termos da massa, da rigidez e do amortecimento;
- b) (50%) Representar a transmissibilidade de força em função da frequência quando a excitação é provocada por um desequilíbrio ($f(t)=m_0e\omega^2\cos\omega t$). Indicar eventuais pontos (zonas) notáveis.

FEUP, 29.04.2009
José Dias Rodrigues

Exame Recurso 2008.07.11

PARTE TEÓRICA

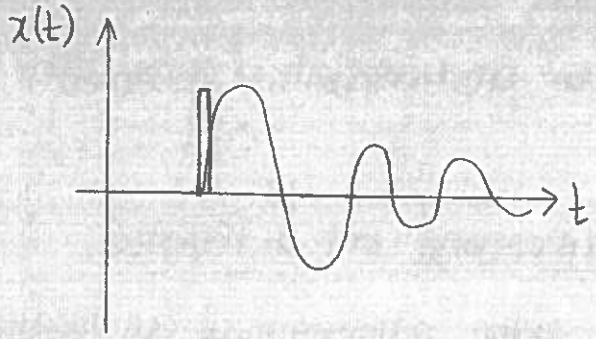
1.

a) Solicitação impulsiva no instante $t = \tau$, $f(t) = F\delta(t-\tau)$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

L.p. com $h(t-\tau) = \dfrac{e^{-\xi \omega_n (t-\tau)}}{m\omega_d} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d (t-\tau))$

É portanto uma resposta harmónica (c/ decaimento $\xi > 0$) cuja amplitude máxima é igual a $\dfrac{F^*}{m\omega_d}$.

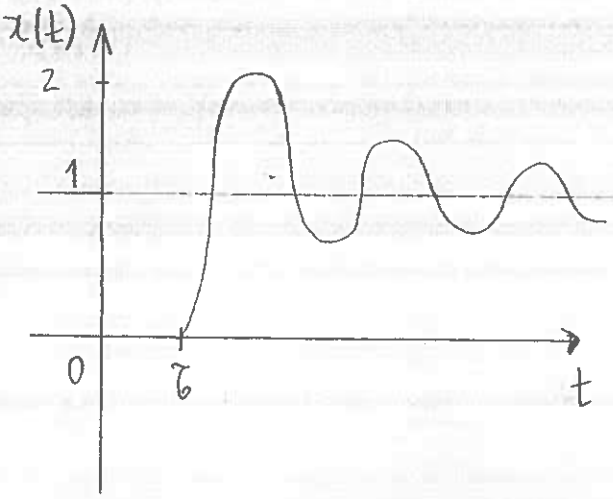


b) Solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\xi \omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

Para $\xi = 0$, sistema não amortecido:

$$x(t) = \frac{F_0}{K} (1 - \cos \omega_n t)$$



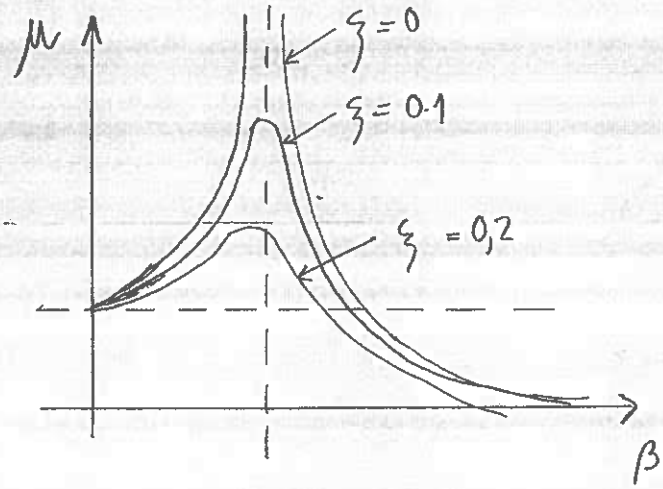
c) $f(t) = f(t+T)$ com $\omega = \frac{2\pi}{T}$

A solicitação pode ser decomposta numa série de Fourier em que cada harmónico tem de frequência $p\omega$ (com p sendo a ordem do harmónico). A resposta é obtida por sobreposição dos efeitos de cada harmónico de solicitação, sendo por sua vez um harmónico desfasado mas com a mesma frequência $p\omega$. Como o valor do período global conduz a uma frequência abaixo da frequência natural não significa que não haja um harmónico de resposta em que a sua frequência seja próxima da frequência natural. Quando isso acontece, sabe-se que o factor de amplificação dinâmica aumenta muito, podendo tornar esse harmónico num harmónico predominante (causando grande vibração).

(2.) SISTEMA VIBRATÓRIO C/ 1 GRAU DE LIBERDADE EM R. FORÇADO

a) Factor de amplificação dinâmica: factor adimensional que traduz a razão entre a amplitude dinâmica $X(\omega)$ e o deslocamento estático X_s, ou seja, traduz o efeito amplificador do movimento alternado do sistema no seu próprio deslocamento.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



b) O impulso pode ser aplicado no instante genérico : $t = \tau$.
Assim, a resposta vem $h(t-\tau)$.

$$\text{Logo } x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$

c)

d) A resposta transitória para sistemas não amortecidos é "permanente" pois não há dissipação de energia. Esta resposta é harmónica e tem uma frequência ω_n. Se a esta resposta adicionarmos o efeito da solicitação harmónica, em fase, percebemos que a magnitude da resposta crescerá indefinidamente porque nunca se dissipa energia.

Parte Prática

2.

a) Em. Cinética

$$J_0 = J_G + m\,\overline{OG_1}^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{36} m_1 l^2 =$$

$$= \frac{1}{9} m_1 l^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} m_1 l^2\right)\left(\dot{\theta}(t)\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}(t)\right)^2$$

Em. potencial

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{3}\sin\theta - y\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 =$$

$$= \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\theta\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)^2 + \frac{k_2}{2} y^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = M \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta) = M_t$$

$$Q_2 = M \frac{\partial}{\partial y}(\theta) = 0$$

Considerando as eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{9} m_1 l^2 \dot\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{1}{9} m_1 l^2 \ddot\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_1 \frac{l^2}{9}\theta + k_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)\frac{l}{3}$$

—— " ——

$$\frac{\partial T}{\partial \dot y} = m_2 \dot y \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y}\right) = m_2 \ddot y$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -k_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + k_2 y$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{l^2}{9}\ddot\theta(t) + k_1 \frac{l^2}{9}\theta(t) + k_2 \frac{l}{3}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) = M(t) \\ m_2 \ddot y(t) - k_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + k_2 y = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 \frac{l^2}{9} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot\theta(t) \\ \ddot y(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2)\frac{l^2}{9} & -k_2 \frac{l}{3} \\ -k_2 \frac{l}{3} & 2k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{u(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{vmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 12000 - 10\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \cong 25{,}728 \text{ rad/s} \quad \vee$$

$\vee \quad \omega_2 \cong 50{,}379$ rad/s

1º Forma natural

$(400 - 0{,}2 \times \overset{28{,}728}{\omega_1^2}) \cdot \theta(\omega) - 1200\, Y(\omega) = 0 \Rightarrow \theta(\omega) \cong 4{,}484\, Y(\omega)$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 4{,}484 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural

$(400 - 0{,}2\,\omega_2^2)\,\theta(\omega) - 1200\, Y(\omega) = 0 \Rightarrow \theta(\omega) \cong -11{,}152\, Y(\omega)$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -11{,}152 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) $$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{\mu\}_1^T [m] \{\mu\}_1}} \{\mu\}_1 \cong 0{,}267 \{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}1975 \\ 0{,}2671 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 \cong 0{,}1693 \{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}8884 \\ 0{,}1693 \end{Bmatrix}$$

d)

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 28{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}197 & -1{,}8884 \\ 0{,}2671 & 0{,}1693 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M(t) \\ \end{Bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 28{,}728^2 & \\ & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}1975\, M(t) \\ -1{,}8884\, M(t) \end{Bmatrix}$$

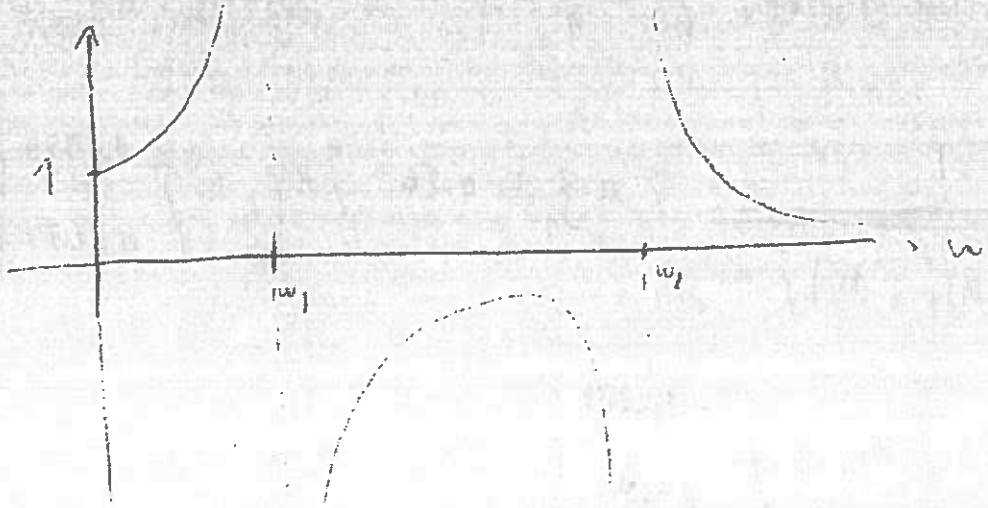
d)

$$\begin{bmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 120\,000 - 10\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pelas expressões 9.19.

$$\Theta(\omega) = \frac{(120\,000 - 10\omega^2)\, M_0 - 0}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120\,000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$

$$Y(\omega) = \frac{0 - (-1200)\, M}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120\,000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$



e) Através de c):

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25{,}728^2\, \eta_1(t) = 1{,}1975\, M_0\, \cos(\omega t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50{,}379^2\, \eta_2(t) = -1{,}8884\, M_0\, \cos(\omega t) \end{cases}, \quad t \leq 6$$

Para este instante:

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{1{,}1975\, M_0}{25{,}728^2}}{|1-\beta_1^2|} \cos(\omega t - \phi_1)$$

$$\phi_1 = \begin{cases} \pi & \text{se } \beta_1 > 1 \\ 0 & \text{se } \beta_1 < 1 \end{cases}$$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{-1{,}8884\, M_0}{50{,}379^2}}{|1-\beta_2^2|} \cos(\omega t - \phi_2)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} \pi & \text{se } \beta_2 > 1 \\ 0 & \text{se } \beta_1 < 1 \end{cases}$$

Para $t > \tau$:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25{,}728^2\, \eta_1(t) = 1{,}1975\, M_0 \cos(\omega t) + 1{,}1975\, M_1\, \mu(t-\tau) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50{,}379^2\, \eta_2(t) = -1{,}8884\, M_0 \cos(\omega t) - 1{,}8884\, M_1\, \mu(t-\tau) \end{cases}$$

Se separarmos o efeito das forças, já sabemos qual a contribuição da parte harmónica. Basta calcular a resposta máxima ao degrau:

$$\eta_{1\,max}(\omega) = \frac{2 \times (1{,}1975\, M_1)}{25{,}728^2} \cong 0{,}003618\, M_1$$

$$\eta_{2\,max}(\omega) = \frac{2 \times (-1{,}8884\, M_1)}{50{,}379^2} \cong -0{,}001488\, M_1$$

Então, considerando as 2 solicitações:

$$\eta_{1\,max} = \frac{0{,}001809\, M_0}{|1-\beta^2|} + 0{,}003618\, M_1$$

$$\eta_{2\,max} = -\frac{0{,}000744\, M_0}{|1-\beta^2|} - 0{,}001488\, M_1$$

$$\theta(t)_{max} \leq \overset{=1,1975}{\phi_{11}}\, \eta_{1\,max} + \overset{=-1,8884}{\phi_{12}}\, \eta_{2\,max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta(t)_{max} \leq \frac{0,003571\, M_0}{|1-\beta^2|} + 0,00714\, M_1}$$

É menor porque η_1 e η_2 não estão em fase

3. a) $v(x,t) = V(x)\, g(t)$

$x = 0$:

$$EI \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x=0} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=0} = -\omega^2 m\, V(0) \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(0)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m V(0)}{EI}$$

$x = l$:

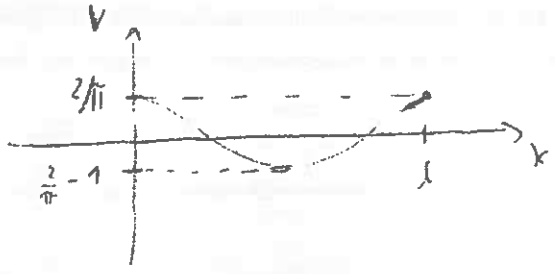
$$EI \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x=l} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=l} \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(l)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m V(l)}{EI}$$

Todas estas cond. fronteira são naturais:

5) Basta a função ser derivável metade das vezes do nº de ordem do problema (problema de ordem 4), e verificar as condições fronteira geométricas (que neste caso não existem):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \rightarrow \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$



c) Em. pot.:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{l}{2}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right]_0^l =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{l}{2} - 0 - 0\right] = \frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}$$

Em. Cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_l \rho A\left(V(x)\right)^2 dx + T^*_{clm}\right) =$$

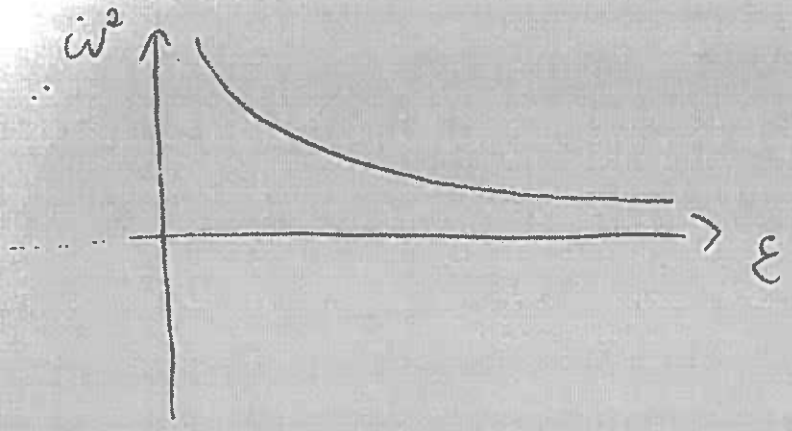
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left\{-\frac{\left[\frac{l}{\pi}\left(\pi\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 8\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) - \left(\pi^2+8\right)x\right]}{2\pi^2}\right\}_0^l + \frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\Big) = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}\right)$$

Energia:

$$K\left(V(x)\right) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}} =$$

$$= \frac{\frac{EI}{\rho A l}\left(\frac{\pi^4}{2l^3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} + \varepsilon\cdot\frac{8}{\pi^2}}$$



d) Pág. 359

na tabela diz β_2 mas na realidade v, β_1 é o 3º Modo de vibração (o 1º e o 2º são translação e rotação do corpo rígido)

livre - livre $\longrightarrow$ $\boxed{\beta_3 l = 4,7300}$

$$\omega_3 = (4,7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = \boxed{22,3729 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

$$\omega_1 = \omega^2 = \frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{ex} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong \boxed{22,6764 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

Variação

$$\text{erro} = \frac{|\omega^{ex} - \omega_3|}{\omega_3} \times 100 \cong 1,37\%$$